



Bearbeitung der Abituraufgaben
des Hessischen Landesabiturs 2011
mithilfe des TI-30X Pro™

Aufgabe A1

Lässt man heißen Kaffee eine Zeit lang stehen, kühlt sich der Kaffee bis auf die Umgebungstemperatur ab. Die Abkühlung geschieht nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz:

$$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-kt} + T_U$$

Dabei bedeutet:

- $T(t)$: Temperatur des Kaffees (in °C) nach t Minuten,
- t : Zeit (in Minuten),
- T_0 : Temperatur des Kaffees (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$,
- T_U : Umgebungstemperatur (in °C),
- k : Abkühlungsfaktor, von Material und Oberflächenbeschaffenheit des Behälters abhängige Konstante (in 1/min)

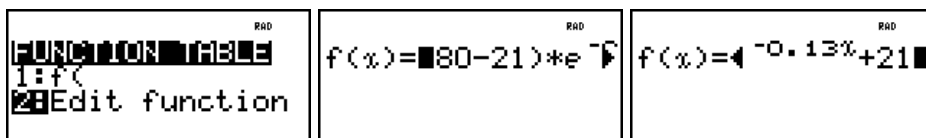
- 1.1 Die Anfangstemperatur des Kaffees in einer Tasse sei 80°C, die Raumtemperatur 21°C und der Abkühlungsfaktor 0,13.
Weisen Sie nach, dass die Temperatur des Kaffees nach 10 Minuten 37,1°C beträgt, und berechnen Sie die Temperatur des Kaffees nach 2 und nach 5 Minuten. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion T in dem Intervall $[0; 30]$.

- 1.2 Man verbrüht sich nicht, wenn die Temperatur des Kaffees unter 45°C gesunken ist. Ermitteln Sie ohne Rechnung anhand einer geeigneten Skizze die Wartezeit, bis der Kaffee eine geringere Temperatur als 45°C hat.

(9 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.1 mithilfe des TI-30X Pro

Eingabe des Funktionsterms ([table](#))



Berechnung von Funktionswerten

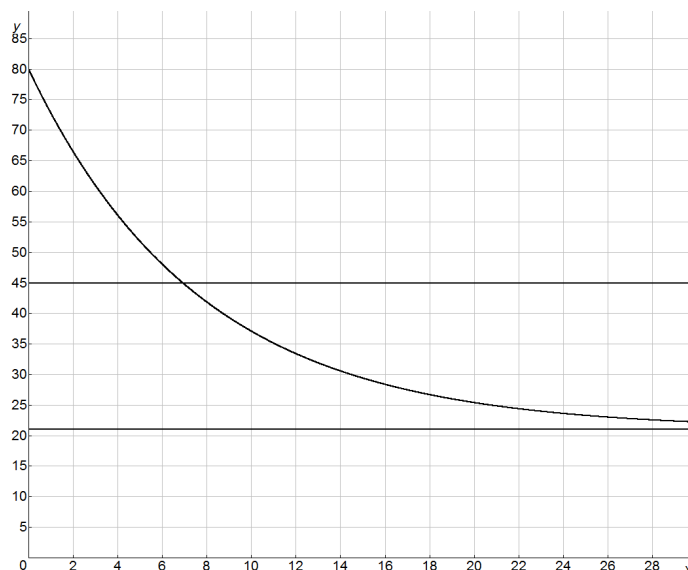
x	$f(x)$
2	66.49204356
3	60.9463556
4	56.07671233
$x=2$	

x	$f(x)$
5	51.80070083
6	48.04595467
7	44.74892922
$x=7$	

x	$f(x)$
10	37.07937579
11	35.11922641
12	33.3980282
$x=10$	

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Erstellen der nebenstehenden Skizze mithilfe der Wertetabelle des TR



Gemäß Wertetabelle muss die gesuchte Stelle zwischen $t = 6$ und $t = 7$ liegen (nahe bei $t = 7$). Erwartet wurde das Ablesen des Wertes aus dem Graphen. Eine numerisch exakte Bestimmung ist möglich mithilfe des numerischen Gleichungslösers ($\boxed{2nd} \boxed{\sin^{-1}}$)

$f(x)=45$	$\boxed{SOLVE \rightarrow 8.91910472}$ $L - R = 0$ $\boxed{SOLVE AGAIN} \quad \boxed{QUIT}$
-----------	---

In einem Becher kühlt der Kaffee etwas langsamer ab. Seine Temperatur T verändert sich nach folgender Gleichung: $T(t) = 59 \cdot e^{-0.1t} + 21$. (Diese gilt für die Aufgaben 2.1, 3.1 und 3.2 sowie 4.)

- 2.1 Berechnen Sie, wie lange man jetzt mindestens warten muss, um den Kaffee ohne Verbrühungsgefahr trinken zu können.
- 2.2 In einem anderen Becher wird bei sonst unveränderten Bedingungen schon nach genau 3 Minuten die Temperatur von 45°C unterschritten. Bestimmen Sie den Abkühlungsfaktor für diesen Becher.

(8 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Erstellen einer Wertetabelle für die geänderte Funktion

$f(x)=59 \cdot e^{-0.1x}$	$\boxed{TABLE}$ $\boxed{X=9}$
---------------------------	----------------------------------

An der Wertetabelle erkennt man, dass der gesuchte Zeitpunkt $t = 9$ ist.

Die „rechnerische“ Bestimmung der Lösung der Gleichung $59 \cdot e^{-0.1t} + 21 = 45$ erfolgt durch Umformung:

$$59 \cdot e^{-0.1t} = 24 \Leftrightarrow e^{-0.1t} = \frac{24}{59} \Leftrightarrow -0.1t = \ln\left(\frac{24}{59}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{24}{59}\right)}{0.1} \approx 9,0$$

$\boxed{\ln(24/59) / -0.1}$ $\boxed{8.994836136}$
--

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Nach Aufgabenstellung gilt für den unbekannten Parameter k : $59 \cdot e^{-k \cdot 3} + 21 = 45$, also:

$$59 \cdot e^{-k \cdot 3} = 24 \Leftrightarrow e^{-k \cdot 3} = \frac{24}{59} \Leftrightarrow -3k = \ln\left(\frac{24}{59}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{24}{59}\right)}{3} \approx 0,3$$

$\boxed{\ln(24/59) / -3}$ $\boxed{0.299827871}$
--

Bestimmung des gesuchten Parameters k mithilfe der Wertetabelle des angepassten Funktionsterms mit geeigneter Schrittweite

$f(x)=59 \cdot e^{-3x} + 21$	$\boxed{TABLE}$ $\boxed{X=0.3}$	$\boxed{TABLE}$ $\boxed{X=0.3}$
------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

- 3.1 Berechnen Sie die Abkühlungsgeschwindigkeit für $t = 0$. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Abkühlungsgeschwindigkeit halb so groß ist wie für $t = 0$.
- 3.2 Newton hat sein Abkühlungsgesetz auch in folgender Form angegeben: $T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_U)$. Zeigen Sie, dass diese Gleichung für die Abkühlungsfunktion des Kaffeebechers gilt.
- 3.3 Die Abkühlungsgeschwindigkeit in einem besonderen (sehr gut isolierten) Gefäß, das in demselben Raum steht, wird durch folgende Funktion beschrieben: $A(t) = -0,69 \cdot e^{-0,01t}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Ermitteln Sie die zugehörige Abkühlungsfunktion und die Anfangstemperatur.

(17 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Man bestimmt zunächst die Ableitung $f'(t) = 59 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1t} = -5,9 \cdot e^{-0,1t}$, dann gilt $f'(0) = -5,9$ und es ist die Gleichung $f'(t) = -2,95$ zu lösen.

$$-5,9 \cdot e^{-0,1t} = -2,95 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,1} \approx 6,93$$

Man kann zur Kontrolle die numerische Ableitung (2nd [ln log]) zur Zeit $t = 0$ bestimmen:

Definiert man die numerische Ableitungsfunktion als neue Funktion f , dann kann mit dieser Funktion die numerische Ableitung an einer beliebigen Stelle bestimmt werden: An der Wertetabelle kann man ablesen, dass ungefähr bei $t = 7$ die Abkühlungsgeschwindigkeit halb so groß ist wie an der Stelle $t = 0$:

X	f(X)
6	-2.23798867
7	-2.92985330
8	-2.65104089
X=8	

Numerisch exakt kann diese Stelle mithilfe des numerischen Gleichungslösers bestimmt werden:

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.3 mithilfe des TI-30X Pro:

Aus $f'(t) = -0,69 \cdot e^{-0,01t}$ kann man wieder auf $f(t) = 69 \cdot e^{-0,01t} + 21$ zurückschließen (da die innere Ableitung gleich $-0,01$ ist); daher beträgt die Anfangstemperatur $69^\circ + 21^\circ = 90^\circ$.

Für den Einsatz des TR bietet sich höchstens die Kontrollrechnung durch Vergleich der Wertetabellen an:

1. Möglichkeit: Vergleich der Wertetabelle der Abkühlungsgeschwindigkeitsfunktion f' mit der Wertetabelle der numerischen Ableitungsfunktion von f :

X	f(X)
0	-0.69
5	-0.6563483..
10	-0.6243378..
X=0	

X	f(X)
0	-0.69
5	-0.6563483
10	-0.62433782
X=0	

2. Möglichkeit: Vergleich der Wertetabelle der Funktion f mit der Wertetabelle der Funktion, die durch numerische Integration gewonnen wird:

$f(x)=69 \cdot e^{-0.01x}$	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>90</td></tr><tr><td>5</td><td>86.63483029</td></tr><tr><td>10</td><td>83.43378184</td></tr><tr><td>x=0</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	0	90	5	86.63483029	10	83.43378184	x=0		$f(x)=90+\int_0^x (-0.6)$	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>90</td></tr><tr><td>5</td><td>86.63483029</td></tr><tr><td>10</td><td>83.43378184</td></tr><tr><td>x=0</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	0	90	5	86.63483029	10	83.43378184	x=0	
x	f(x)																						
0	90																						
5	86.63483029																						
10	83.43378184																						
x=0																							
x	f(x)																						
0	90																						
5	86.63483029																						
10	83.43378184																						
x=0																							

4. Berechnen Sie unter Angabe einer Stammfunktion das Integral

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt \quad \text{für } t_2 = 15 \text{ und } t_1 = 5.$$

Deuten Sie das Integral im Sachzusammenhang.

(6 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 4 mithilfe des TI-30X Pro:

Die Berechnung des numerischen Integrals ergibt die mittlere Temperatur der Flüssigkeit im Intervall zwischen $t = 5$ und $t = 15$:

$$\frac{1}{10} * \int_5^{15} (59 * e^{-0.01x}) dx = 43.62062947$$

Aufgabe A2

1. Die nachträgliche Auswertung der Aufzeichnungen des Höhenbarometers eines Heißluftballons ergab, dass sich die Höhe des Ballons über dem Startpunkt der Ballonfahrt durch die Funktion h mit der Gleichung $h(t) = -0.5t^3 + 2t^2 + t$ beschreiben lässt.

t : Zeit in Stunden

$h(t)$: Höhe in 100 Metern

Der Ballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $h = 0$.

- 1.1 Berechnen Sie die Dauer der Ballonfahrt sowie die größte erreichte Höhe unter der Annahme, dass der Ballon eine ebene Landschaft überfliegt.
Geben Sie einen für den Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich an.
- 1.2 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von h und deuten Sie diesen im Sachzusammenhang.
- 1.3 Skizzieren Sie den Graphen von h (Höhenprofil der Ballonfahrt).

(22 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.1 und 1.3 mithilfe des TI-30X Pro:

Eingabe des Funktionsterms, Berechnung von Funktionswerten (um einen Überblick zu gewinnen und für die Skizze des Graphen)

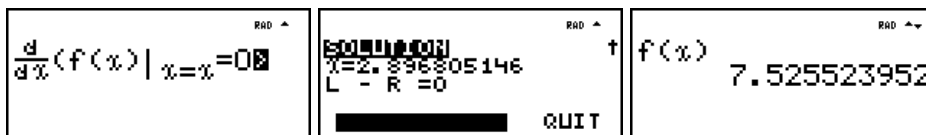
$f(x) = -0.5x^3 + 2x^2$	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2.5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>x=0</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	0	0	1	2.5	2	6	x=0		<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>3</td><td>2.5</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>-7.5</td></tr><tr><td>x=5</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	3	2.5	4	4	5	-7.5	x=5	
x	f(x)																					
0	0																					
1	2.5																					
2	6																					
x=0																						
x	f(x)																					
3	2.5																					
4	4																					
5	-7.5																					
x=5																						

Bestimmung der ersten positiven Nullstelle mithilfe des numerischen Gleichungslösers ($\boxed{2nd} \boxed{\sin^{-1}}$):

$f(x) = 0$	<table> <tr><td colspan="2">SOLVING EQUATION</td></tr> <tr><td>X=</td><td>4.449489743</td></tr> <tr><td>L - R =</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="2">SOLVE AGAIN QUIT</td></tr> </table>	SOLVING EQUATION		X=	4.449489743	L - R =	0	SOLVE AGAIN QUIT	
SOLVING EQUATION									
X=	4.449489743								
L - R =	0								
SOLVE AGAIN QUIT									

Damit ergibt sich als sinnvoller Definitionsbereich das Intervall $0 \leq t \leq 4,45$.

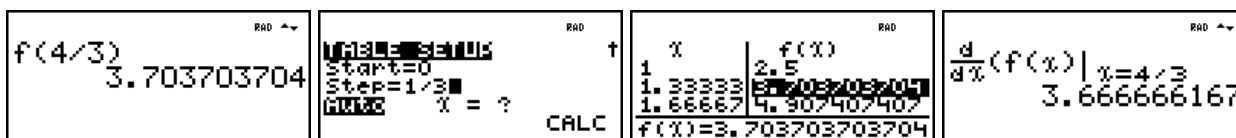
Bestimmung des Maximums mithilfe der numerischen Ableitung:



Da unter der Variablen x der Wert der Nullstelle der numerischen Ableitung gespeichert ist, kann mit $f(x)$ (**table**) der zugehörige Funktionswert berechnet werden. Die größte erreichte Höhe beträgt daher etwa 753 m.

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.2 mithilfe des TI-30X Pro:

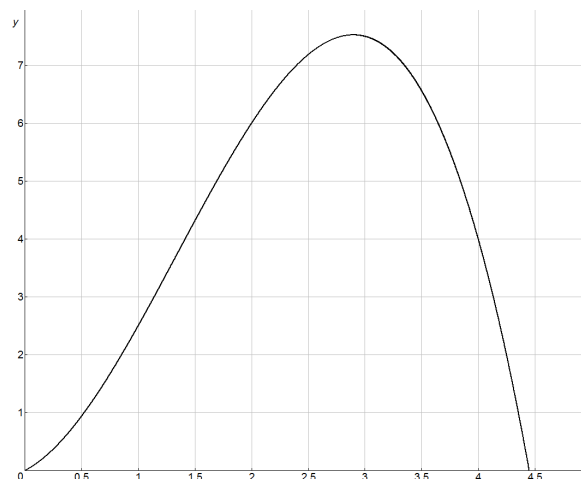
Es gilt $h'(t) = -1,5t^2 + 4t + 1$ und $h''(t) = -3t + 4$. Die Wendestelle liegt (wegen des Verlaufs des Graphen) bei $t = 4/3$. Der Funktionswert kann mithilfe des TR bestimmt werden (entweder einzeln über die Wertetabelle mit Schrittweite $1/3$):



Der steilste Anstieg des Heißluftballons fand also zum Zeitpunkt $t = 4/3$ statt, d. h. nach 1 Stunde und 20 Minuten; der Heißluftballon hatte zu diesem Zeitpunkt eine Höhe von 370 m und stieg mit einer Geschwindigkeit von ca. 367 m/h, d. i. ca. 6 m/min (nicht verlangte Informationen).

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.3 mithilfe des TI-30X Pro:

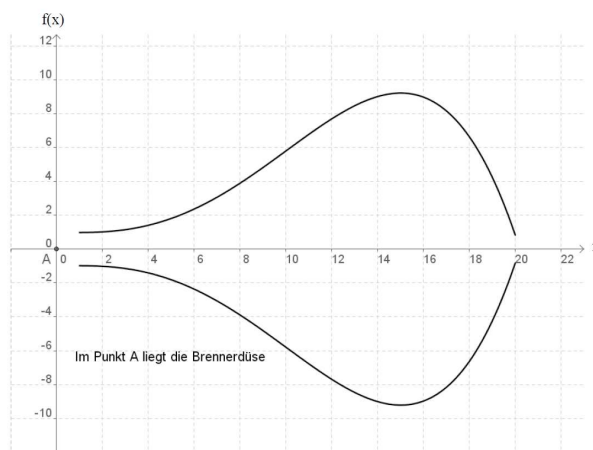
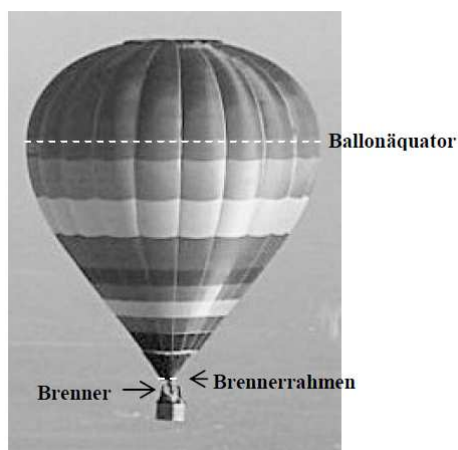
Erstellen der nebenstehenden Skizze mithilfe der Wertetabelle des TR



2. Die Ballonhülle eines Heißluftballons wird durch horizontale und vertikale Lastbänder, die in die Hülle eingenäht sind, stabilisiert. Die horizontalen Lastbänder verlaufen wie Fassringe rund um die Hülle. Die vertikalen Lastbänder laufen vom höchsten Punkt des Ballons seitlich herab bis zum runden Brennerrahmen, der oberhalb der Austrittsdüse des Brenners sitzt (siehe Material 1). Am Ballonäquator ist der Umfang des Ballons maximal.

- 2.1 Die Funktionen f_1 mit der Gleichung $f_1(x) = \frac{1}{2000} \cdot x^4 - \frac{1}{100} \cdot x^3 - \frac{1}{1000} \cdot x^2 + \frac{3}{100} \cdot x - 1$ und f_2 mit der Gleichung $f_2(x) = -\frac{1}{2000} \cdot x^4 + \frac{1}{100} \cdot x^3 + \frac{1}{1000} \cdot x^2 - \frac{3}{100} \cdot x + 1$ stellen den Umriss des Heißluftballons hinreichend genau dar (siehe Material 2).

Ordnen Sie die Graphen in Material 2 den Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu. Begründen Sie ihre Entscheidung.



2.2 Begründen Sie an einem wesentlichen Gesichtspunkt, warum die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die reale Ballonhülle nicht optimal beschreiben.

2.3 Bestimmen Sie die Ableitung von $f_1(x)$ und zeigen Sie, dass auch

$$f_1'(x) = \frac{1}{500} \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-15) \text{ gilt.}$$

2.4 Berechnen Sie die Länge des horizontalen Lastbandes am Ballonäquator.

2.5 Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Gleichung im Sachzusammenhang und beschreiben Sie die zur Berechnung notwendigen Schritte.

$$\pi \cdot \int_1^{20} \left(\frac{1}{2000} \cdot x^4 - \frac{1}{100} \cdot x^3 - \frac{1}{1000} \cdot x^2 + \frac{3}{100} \cdot x - 1 \right)^2 dx = 2033,9$$

(18 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 mithilfe des TI-30X Pro:

An der Wertetabelle kann man ablesen, dass mit f_1 der untere Graph beschrieben wird:

$f(x) = .0005x^4 - .0$	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>-0.9905</td></tr><tr><td>2</td><td>-1.016</td></tr><tr><td>x=0</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	0	-1	1	-0.9905	2	-1.016	x=0		<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>19</td><td>-4.2205</td></tr><tr><td>20</td><td>-0.8</td></tr><tr><td>21</td><td>3.8195</td></tr><tr><td>x=21</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	19	-4.2205	20	-0.8	21	3.8195	x=21	
x	f(x)																					
0	-1																					
1	-0.9905																					
2	-1.016																					
x=0																						
x	f(x)																					
19	-4.2205																					
20	-0.8																					
21	3.8195																					
x=21																						

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.3 mithilfe des TI-30X Pro:

Mithilfe des numerischen Gleichungslösers kann man die Nullstellen der numerischen Ableitung bestimmen:
 $x = -1, x = +1, x = +15$

RAD $\frac{d}{dx}(f(x)) _{x=x=0}$	RAD SOLUTION ↑ $x=-1$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	RAD SOLUTION ↑ $x=1$ $L - R = 0$ QUIT	RAD SOLUTION ↑ $x=15$ $L - R = 0$ QUIT
--	---	---	--

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.4 mithilfe des TI-30X Pro:

Gesucht ist der Betrag des Funktionswerts am Minimum der Funktion, also bei $x = 15$. Da unter x der zuletzt bestimmte Wert gespeichert ist, genügt die Eingabe $f(x)$ in der **table**-Option. Der Umfang berechnet sich daher zu $u = 2\pi \cdot 9,2125 \approx 57,88$ m.

$f(x)$ -9.2125	<table> <tr><td>f(x)</td><td>-9.2125</td></tr> <tr><td>ans*2*π</td><td>-57.88384464</td></tr> </table>	f(x)	-9.2125	ans*2*π	-57.88384464
f(x)	-9.2125				
ans*2*π	-57.88384464				

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.5 mithilfe des TI-30X Pro:

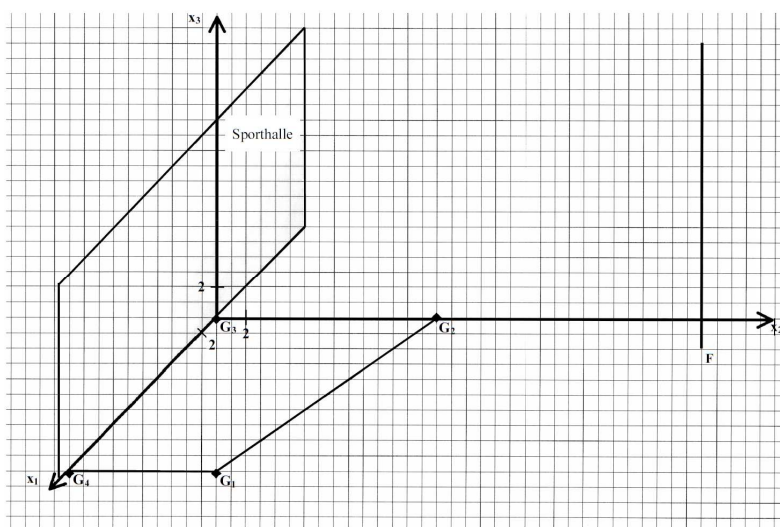
Das Volumen der durch die Funktion modellierten Rotationskörpers ist in der Aufgabenstellung vorgegeben; es könnte mithilfe des TR problemlos numerisch bestimmt werden:

$$\pi \cdot \int_1^{20} (f(x))^2 dx = 2033.899689$$

Aufgabe B1

1. An eine Sporthalle soll ein Anbau auf dem trapezförmigen Grundriss $G_1G_2G_3G_4$ mit $G_1(20|10|0)$, $G_2(0|15|0)$, $G_3(0|0|0)$ und $G_4(20|0|0)$ errichtet werden (siehe Material 1, Angaben in Metern). An der Wand zur Halle, die in der x_1x_3 -Ebene liegt, wird der Anbau 9m hoch, an der Ecke G_1 7m und an der Ecke G_2 6m.
- 1.1 Geben Sie zunächst die Koordinaten der vier Eckpunkte der Dachfläche an. Zeichnen Sie dann den Anbau mit Dachfläche in das Material 1 ein.
- 1.2 Bestimmen Sie für die Ebene E, in der die Dachfläche liegt, jeweils eine Gleichung in Parameter- und in Koordinatenform. [Kontrollergesult: $E: x_2 + 5x_3 - 45 = 0$]

(12 BE)



➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Das Dach des Anbaus wird bestimmt durch die vier Punkte $H_1(20|10|7)$, $H_2(0|15|6)$, $H_3(0|0|9)$ und $H_4(20|0|9)$. Die Ebene wird aufgespannt beispielsweise durch die Ebene durch die drei Punkte H_1 , H_2 , H_4

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20-20 \\ 10-0 \\ 7-9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-20 \\ 0-0 \\ 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Nachweis, dass der Punkt H_3 in dieser Ebene liegt, müsste man das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0r - 20s = -20 \\ 10r + 0s = 15 \\ -2r + 0s = -3 \end{cases}$$

Man liest unmittelbar ab, dass $r = 1,5$ und $s = 1$ sein müssen.

Ein Normalenvektor der Ebene steht senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren; offensichtlich ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

ein solcher Vektor. Falls eine Rechnung notwendig wäre, könnte dieser auch mithilfe des TR erfolgen:

Lösung des linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Variablen:

$0 \cdot n_1 + 10 \cdot n_2 - 2 \cdot n_3 = 0 \wedge -20 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0$: Der Lösungsvektor ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2z \\ z \end{pmatrix}$, für $z = 5$ ergibt sich

der angegebene Normalenvektor. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes, z. B. H_3 , liefert dann die Koordinatengleichung $x_2 + 5x_3 = 45$.

--	--	--	--

2. An der Stelle F(4|35|0) steht ein Flutlichtmast mit einer Höhe von 20m (siehe Material 1). Der Mast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf den Anbau. Die Sonnen-

strahlen werden zum Zeitpunkt der Beobachtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben.

- 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunkts S der Mastspitze auf dem Dach des Anbaus.

- 2.2 Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 35 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, schneidet die x_1x_2 -Ebene im Punkt $S_2(10|20|0)$.

Erklären Sie, wie mit Hilfe dieser Angaben der gesamte Schatten des Flutlichtmastes ohne weitere Rechnung bestimmt werden kann. Zeichnen Sie den Schatten in Material 1 ein.

(10 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Der Schnittpunkt der Geraden, die durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben ist, mit der oben bestimmten Ebene

könnte durch Einsetzen der Koordinaten $x_1 = 4 + 2t$, $x_2 = 35 - 5t$, $x_3 = 20 - 2t$ in die Koordinatengleichung der Ebene erfolgen. Mit Rechnerhilfe kann dies aber auch (wenn auch aufwändiger) mithilfe der Parameterdarstellung der Ebene erfolgen: Zu lösen ist ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0r - 20s - 2t = -16 \\ 10r + 0s + 5t = 35 \\ -2r + 0s + 2t = 11 \end{cases}$$

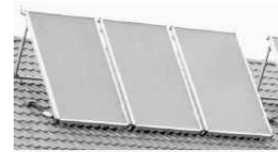
--	--	--	--

Setzt man die Parameter-Werte ($r = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{5}$ in die Parameterdarstellung der Ebene oder $t = 6$ in die Parameterdarstellung der Gerade) ein, dann erhält man den Schnittpunkt $S_1(16 | 5 | 8)$.

3. Auf dem Anbaudach soll eine Solaranlage installiert werden. Für eine optimale Ausbeute muss

die Solarzelle senkrecht zu $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (optimale Einstrahlung der Sonne) montiert werden.

Der Winkel zwischen Solarzellen und Dach kann durch Stützen variiert werden; allerdings muss die Vorderkante der Zellen auf einer Geraden angebracht werden, die in der Dachebene liegt und orthogonal zur Sonnenrichtung verläuft.



Zeigen Sie, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$, geeignet ist.

(8 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3 mithilfe des TI-30X Pro:

Der Nachweis, dass die angegebene Gerade orthogonal zur Sonnenrichtung verläuft, erfolgt durch

Bestimmung des Skalarprodukts: $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = 39 - 45 + 6 = 0$

Zur Berechnung kann auch der TR verwendet werden:

--	--	--	--

Der Nachweis, dass die angegebene Gerade h in der Dach-Ebene verläuft, kann mithilfe des linearen Gleichungssystems erfolgen, durch das die gemeinsamen Punkte der Dachebene und der Geraden bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0r - 20s + 13t = -10 \\ 10r + 0s - 15t = 5 \\ -2r + 0s + 3t = -1 \end{cases}$$

--	--	--	--

Setzt man die Lösungen für r und s in die Parameterdarstellung der Ebene ein, so erhält man eine Parameterdarstellung der Gerade h :

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{20}t\right) \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}t\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{13}{20}t\right) \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man zeigen: Der Aufhängepunkt der Geraden h liegt in der Ebene, d. h. das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen besitzt eine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0r - 20s = -10 \\ 10r + 0s = 5 \\ -2r + 0s = -1 \end{cases}$$

--	--	--	--

und der Richtungsvektor der Geraden h lässt sich als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene darstellen. Für das hierfür zu lösende lineare Gleichungssystem wird zwar kein TR benötigt, aber dieser Lösungsweg soll hier trotzdem gezeigt werden:

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0r - 20s = -13 \\ 10r + 0s = 15 \\ -2r + 0s = -3 \end{cases}$$

d. h. es gilt: $\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{13}{20} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe B2

An einem Berg gibt es einen Hang, der sich annähernd durch eine Dreiecksfläche beschreiben lässt. In ein Koordinatensystem übertragen liegt die Spitze dieses Hanges im Punkt $P(0|0|2,5)$. Die beiden Eckpunkte am Fuß des Berges sind $Q(4|0|0)$ und $R(2|5|0)$. Die Koordinaten geben dabei die Entfernungen in x-, y- und z-Richtung in 100m an.

- 1.1 Zeichnen Sie die Punkte und den Hang in das vorgegebene Koordinatensystem (Material 1) und ermitteln Sie eine Parameter- sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der der Hang liegt.

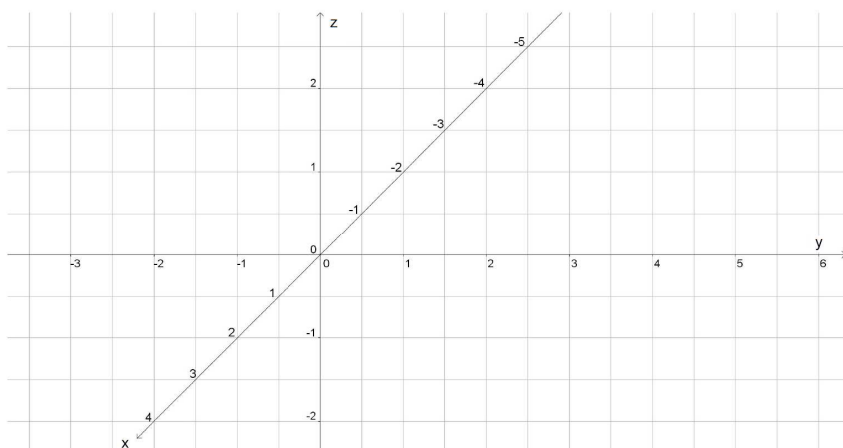
[Mögliches Ergebnis: $E: 2,5x + y + 4z = 10$]

- 1.2 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal zu der Ebene E steht.

- 1.3 Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{n}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie das Ergebnis bezogen auf die Ebene E .

(14 BE)



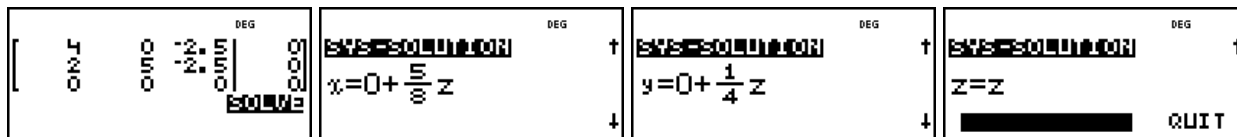
➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Aus den Koordinaten der Punkte P(0|0|2,5), Q(4|0|0) und R(2|5|0) bestimmt man eine Parameterdarstellung der Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-0 \\ 0-2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-0 \\ 0-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Um eine Koordinatengleichung zu bestimmen, sucht man einen zur Ebene orthogonalen Vektor. Rechnerisch geschieht dies durch Lösung des linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Variablen:

$$4 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 - 2,5 \cdot n_3 = 0 \wedge 2 \cdot n_1 + 5 \cdot n_2 - 2,5 \cdot n_3 = 0:$$



Der Lösungsvektor ist $\begin{pmatrix} 5/8z \\ 1/4z \\ z \end{pmatrix}$, für $z = 4$ ergibt sich der angegebene Normalenvektor. Einsetzen der

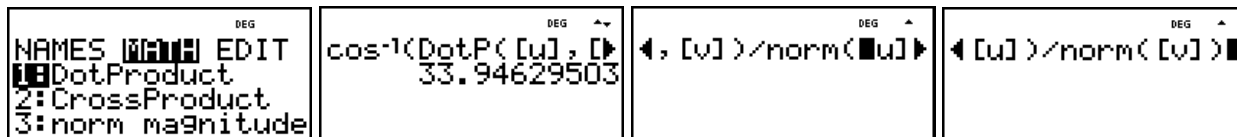
Koordinaten eines Punktes, z. B. Q, liefert dann die Koordinatengleichung $2,5x + 1y + 4z = 10$.

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1.3 mithilfe des TI-30X Pro:

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und dem Vektor, der die z-Achse aufspannt, lässt sich

mithilfe von $\cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$ bestimmen. Mithilfe des TR wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren sowie die

Beträge der beiden Vektoren bestimmt. Der gesuchte Winkel ist $33,95^\circ$ groß; der Neigungswinkel der Ebene gegenüber der x-y-Ebene beträgt $90^\circ - 33,95^\circ = 56,05^\circ$.



2. Vom Tal aus soll eine Zahnradschiene aus Aluminium für ein Transportsystem zur Spitze des Hangs gebaut werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Zahnradschiene geradlinig und parallel über der Hangfläche verläuft. Der Anfang der Zahnradschiene im Tal liegt in der Talstation im Punkt T(3|t|0,005). Auf der Spitze des Hangs wird im Punkt P ein 0,5 m hoher, zur x-y-Ebene senkrechter Mast errichtet, an dessen Spitze S die Zahnradschiene endet.

- 2.1 Bestimmen Sie den fehlenden Wert t sowie die Gleichung der Geraden g, die den Verlauf der Zahnradschiene beschreibt.

[Mögliche Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}]$

- 2.2 Berechnen Sie die Masse der gesamten Zahnradschiene, wenn ein Meter Schiene eine Masse von 27,1 kg hat.

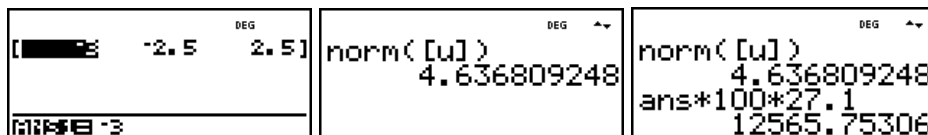
(8 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Gesucht ist die Koordinate t derart, dass die Koordinaten des Punktes $T(3 | t | 0)$ die Ebenengleichung $2,5x + 1y + 4z = 10$ erfüllen: $2,5 \cdot 3 + 1 \cdot t + 4 \cdot 0 = 10 \Leftrightarrow t = 2,5$. Die Gerade durch $T(3 | 2,5 | 0,005)$ und $S(0 | 0 | 2,505)$ lässt sich beschreiben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-2,5 \\ 2,505-0,005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,005 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } 2s = r$$

Die Länge der Schiene wird bestimmt durch die Länge des Verbindungsvektors $\begin{pmatrix} -3 \\ -2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \approx 4,64$



Die Masse der Schiene mit einer Länge von 464 m beträgt daher ca. 12566 kg.

3. Zum Abstützen der Zahnradschiene müssen in gleichmäßigen Abständen lotrechte Stützmasten angebracht werden, u.a. eine Stütze, deren Spitze die Zahnradschiene im Punkt $U(1,8 | 1,5 | 1,002)$ berührt.

Da der Boden unmittelbar unter diesem Punkt zu weich ist, werden seitlich versetzt zwei schräge Stützen links und rechts von der Zahnradschiene in den Punkten $Q_1(1,8018 | 1,4995 | 0,999)$ und Q_2 , die in der Hangebene liegen, gebaut.

- 3.1 Zeigen Sie, dass der Punkt Q_1 in der Hangebene E liegt.

- 3.2 Erklären Sie die Bedeutung der Zeilen (1) bis (4) im Sachzusammenhang.

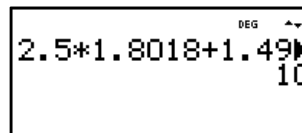
$$\begin{aligned} (1) \quad S: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,5 \\ 1,002 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5x - 6y = 0 \\ (2) \quad h: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1,8018 \\ 1,4995 \\ 0,999 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \\ (3) \quad 5(1,8018 + 5t) - 6(1,4995 - 6t) &= 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{15250} \Rightarrow D(1,8008 | 1,5007 | 0,999) \\ (4) \quad t^* = 2 \cdot \left(-\frac{3}{15250}\right) &= -\frac{3}{7625} \Rightarrow \text{in } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,8018 \\ 1,4995 \\ 0,999 \end{pmatrix} - \frac{3}{7625} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7998 \\ 1,5019 \\ 0,999 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow Q_2(1,7998 | 1,5019 | 0,999) \end{aligned}$$

(8 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Der Nachweis, dass der Punkt $Q_1(1,8018 | 1,4995 | 0,999)$ in der Ebene liegt, kann durch Einsetzen der Koordinaten in die Koordinatengleichung erfolgen:

$$2,5 \cdot 1,8018 + 1 \cdot 1,4995 + 4 \cdot 0,999 = 10$$



Alternativ kann dies auch mit der Parameterdarstellung überprüft werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18018 \\ 14995 \\ 0,999 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r + 2s = 18018 \\ 0r + 5s = 14995 \\ -2,5r - 2,5s = -1501 \end{cases}$$

--	--	--	--

Da das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen eindeutig gelöst werden kann, ist der Nachweis erfolgt.

Aufgabe C1

Bei der TOTO-13er-Wette (vgl. abgebildeten Ausschnitt aus einem Spielschein) wird auf den Spielausgang von 13 Fußballspielen gewettet. Für jedes der 13 Spiele stehen drei Tipp-Möglichkeiten zur Auswahl:

- 1 Sieg der erstgenannten Mannschaft,
- 0 Unentschieden,
- 2 Sieg der zweitgenannten Mannschaft.

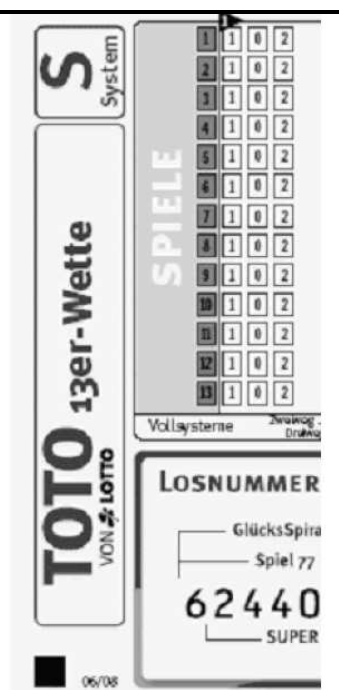
Eine Kombination der 13 Tipps wird Tippreihe genannt. Eine Tippreihe gewinnt, wenn 10, 11, 12 oder 13 Spielergebnisse richtig vorausgesagt wurden.

1. Jemand kennt sich im Fußball nicht aus und füllt eine Tippreihe durch zufällige Entscheidungen aus.

Begründen Sie, dass sich dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette deuten lässt und geben Sie deren Parameter an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fußball-Laie im TOTO

- eine Tippreihe vollständig richtig ausfüllt
- gewinnt.



Ausschnitt aus einem Spielschein mit einer Tippreihe der TOTO-13er-Wette

(11 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 1 mithilfe des TI-30X Pro:

Abgegeben werden unabhängig voneinander $n = 13$ Tipps, die mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$ richtig sind (eine von drei Tipp-Möglichkeiten). Beschreibt die Zufallsgröße X : Anzahl der richtigen Tipps dann sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $P(X = 13)$ sowie $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$ zu bestimmen:

--	--	--	--

Es gilt: $P(X = 13) \approx 0,000063 \%$ und $P(X \geq 10) \approx 0,165 \%$

Anmerkung: Fußball-interessierte Schüler könnten durch ihre Kenntnisse über übliche Spielausgänge irritiert werden; hier geht es aber nicht um die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel mit einem Sieg der Heimmannschaft usw. ausgeht, sondern um die Wahrscheinlichkeit, dass der Tipp richtig ist.

2. Fußballinteressierte TOTO-Spieler haben im Allgemeinen größere Chancen, richtige Vorhersagen über den Spielausgang zu treffen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein fußballinteressierter TOTO-Spieler, der im Mittel in 45% seiner Vorhersagen Recht behält, in einer Tippreihe genau zehn Spielausgänge richtig voraussagt.

Dokumentieren Sie den vollständigen Rechenterm, um die Wahrscheinlichkeit, dass ein fußballinteressierter TOTO-Spieler in der 13er-Wette gewinnt, berechnen zu können. Ein Ergebnis ist nicht verlangt.

(7 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 2 mithilfe des TI-30X Pro:

Für $n = 13$ und $p = 0,45$ ergibt sich: $P(X = 10) \approx 1,62\%$ und $P(X \geq 10) \approx 2,03\%$

DEG ↑ Binomialcdf TRIALS=n=13 P(SUCCESS)=0.45 X=10 CALC	DEG ↑ Binomialpdf VALUE=0.016202396 STORE: [Y]ztabcd SOLVE AGAIN QUIT	DEG ↑ Binomialcdf TRIALS=n=13 P(SUCCESS)=0.45 X=9 CALC	DEG ↑ Binomialcdf VALUE=0.979658154 STORE: [Y]ztabcd SOLVE AGAIN QUIT
--	---	---	---

$$P(X \geq 10) = \binom{13}{10} \cdot 0,45^{10} \cdot 0,55^3 + \binom{13}{11} \cdot 0,45^{11} \cdot 0,55^2 + \binom{13}{12} \cdot 0,45^{12} \cdot 0,55^1 + \binom{13}{13} \cdot 0,45^{13} \cdot 0,55^0$$

3. Bei der Teilnahme an der TOTO-13er-Wette kostet eine Tippreihe 50 Cent. Die gesamten Spieleinsätze werden zu 50% als Gewinne ausgeschüttet. Der Ausschüttungsbetrag wird zu je 25% auf die vier Gewinnklassen (13, 12, 11 bzw. 10 Richtige) verteilt. Der auf die jeweilige Gewinnklasse fallende Betrag wird gleichmäßig auf die Gewinner aufgeteilt, wobei der Gewinn des Einzelnen auf volle zehn Cent abgerundet wird.

- 3.1 Die 42. Ausspielung der TOTO-13er-Wette am 18./19. Oktober 2008 mit einem Gesamtspeleinsatz von 635.399,00€ wurde ausgewertet. Von den Ergebnissen in den Gewinnklassen 1 bis 4 liegt folgende, lückenhafte Tabelle vor:

Gewinn-Klasse Nr.	Anzahl der Gewinner	Beträge
1	114	€
2	1.732	€
3	12.727	6,20 €
4	53.143	1,40 €

<https://www.lotto-hessen.de/c/totoewquota>
(abgerufen 21.09.2010)

Berechnen Sie die in der Tabelle fehlenden Gewinnbeträge für die Gewinnklassen 1 und 2.

- 3.2 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fußballinteressierter TOTO-Spieler, der in 45% seiner Vorhersagen Recht behält, in der 13er-Wette beim TOTO gewinnt, beträgt etwa 2% (Ergebnis des Rechenterms aus Aufgabe 2).

Geben Sie an, wie viele Tippreihen abgegeben wurden. Berechnen Sie, wie viele Gewinne in der 42. Ausspielung insgesamt zu erwarten gewesen wären, wenn die Tippscheine zufällig mit einer 45%-igen Trefferquote gemäß Aufgabe 2 ausgefüllt worden wären und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der tatsächlichen Anzahl der Gewinnreihen.

Ermitteln Sie einen ungefähren Wert für die Wahrscheinlichkeit, einen Spielausgang korrekt vorherzusagen, damit die tatsächlich aufgetretene Anzahl der Gewinne entsteht.

(12 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.1 mithilfe des TI-30X Pro:

Gesamt-Spieleinsatz: 635.399,00 €

50 % Ausschüttung: 635.399,00 € : 2 = 317.699,50 €

Ausschüttung pro Gewinnklasse: 317.699,50 € : 4 = 79.424,875 €

Ausschüttung pro Spiel in Gewinnklasse 1: 79.424,875 € : 114 ≈ 696,70 €

Ausschüttung pro Spiel in Gewinnklasse 2: 79.424,875 € : 1732 ≈ 45,80 €

Ausschüttung pro Spiel in Gewinnklasse 3: 79.424,875 € : 12727 ≈ 6,20 € (Rechnung zur Kontrolle)

Ausschüttung pro Spiel in Gewinnklasse 3: 79.424,875 € : 53142 ≈ 1,40 € (Rechnung zur Kontrolle)

DEG 635399/2 317699.5 ans/4 79424.875 ans→a 79424.875	DEG RECALL VAR 3↑z=6 4:t=0 5:a=79424.875	DEG 79424.875/114 696.7094298	DEG 79424.875/1732 45.85731813
DEG 79424.875/12727 6.240659621	DEG 79424.875/53142 1.494578206		

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Anzahl der abgegebenen Tipps: 635399 € : 0,50 € = 1.270.798

2 % der abgegebenen Tipps: ca. 25.416

Tatsächliche Anzahl der Gewinntipps: 114 + 1.732 + 12.727 + 53.142 = 67.715

67.715 von 1270798 ≈ 5,33 %

DEG 635399/.5 1270798 ans*.02 25415.96	DEG 114+1732+12727+53142 67715	DEG 67715/1270798 0.053285416	DEG 13 nCr 10 286 13 nCr 11 78 13 nCr 12 13
--	--------------------------------------	-------------------------------------	--

Gesucht ist ein Wert für p, für den gilt

$$P(X \geq 10) = \binom{13}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^3 + \binom{13}{11} \cdot p^{11} \cdot (1-p)^2 + \binom{13}{12} \cdot p^{12} \cdot (1-p)^1 + \binom{13}{13} \cdot p^{13} \cdot (1-p)^0 \approx 0,0533$$

Erwartet wurde, dass die Abiturienten dies anhand der beigelegten Tabelle einer Binomialverteilung mit n = 13 ablesen.

Mithilfe der **table**-Option des TR kann dieser Wert numerisch exakt bestimmt werden: Man definiert eine Funktion f durch $f(p) = P_p(X \geq 10)$, d. h. in Abhängigkeit der Erfolgswahrscheinlichkeit p, und bestimmt mithilfe der Wertetabelle dieser Funktion den Schätzwert für p:

$$f(x) = \binom{13}{10} \cdot x^{10} \cdot (1-x)^3 + \binom{13}{11} \cdot x^{11} \cdot (1-x)^2 + \binom{13}{12} \cdot x^{12} \cdot (1-x)^1 + \binom{13}{13} \cdot x^{13} \cdot (1-x)^0$$

$$= 286 \cdot x^{10} \cdot (1-x)^3 + 78 \cdot x^{11} \cdot (1-x)^2 + 13 \cdot x^{12} \cdot (1-x) + x^{13} = 286 \cdot x^{10} \cdot (1-x)^3 + 78 \cdot x^{11} - 156x^{12} + 78x^{13} + 13 \cdot x^{12} - 13x^{13} + x^{13}$$

$$= 286 \cdot x^{10} \cdot (1-x)^3 + 78 \cdot x^{11} - 143x^{12} + 66x^{13}$$

Wegen der Beschränkung der Anzahl der Zeichen eines Funktionsterms beim TI-30X Pro müssen die letzten Terme ausgerechnet (entwickelt) werden. Mithilfe der Wertetabelle von f findet man: $p \approx 0,51$

DEG f(x)=286x ¹⁰ (1-x) ³	DEG 13 nCr 10 286 13 nCr 11 78 13 nCr 12 13 13 nCr 13 1	DEG x f(x) 0.45 0.020341846 0.46 0.024213797 0.47 0.02866781 x=0.45	DEG x f(x) 0.49 0.039567964 0.5 0.046142578 0.51 0.053555139 x=0.51
---	---	--	--

Aufgabe C2

Kinderspielzeug – Jedes Fünfte ist mangelhaft

Die nordrhein-westfälischen Ministerien für Verbraucherschutz und Gesundheit haben 150 unterschiedliche Spielzeuge für Kleinkinder im Alter von bis zu drei Jahren auf ihre Sicherheit untersucht. Dabei zeigte sich, dass jedes fünfte Spielzeug bei dieser Untersuchung durchfiel.

Häufigster Schwachpunkt: Kleinteile (z. B. Räder an Fahrzeugen oder Verzierungen), die sich leicht vom Spielzeug lösen und verschluckt oder eingeatmet werden können.

Neben den Kleinteilen sind enthaltene Schadstoffe ein Durchfallgrund: In 16 der 150 Proben wurden gesundheitsschädliche Stoffe (z. B. die Weichmacher Phthalate oder Formaldehyd) gefunden, die zur Mangelbewertung führten.

Quelle: Ministerium für Umwelt und Naturschutz, Landwirtschaft und Verbraucherschutz des Landes Nordrhein-Westfalen, Pressemitteilung vom 05.04.2009

1. Dieser Artikel enthält keine Angabe, wie viele der 150 untersuchten Spielzeuge gefährliche Kleinteile enthielten.
Entscheiden Sie, ob die Anzahl der untersuchten Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen 14, 21 oder 37 sein kann.

(6 BE)

Jedes 5. Spielzeug fiel durch, d. h. ca. 30 Spielzeuge bestanden den Test nicht $\Rightarrow$ es können nicht 37 Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen gewesen sein.

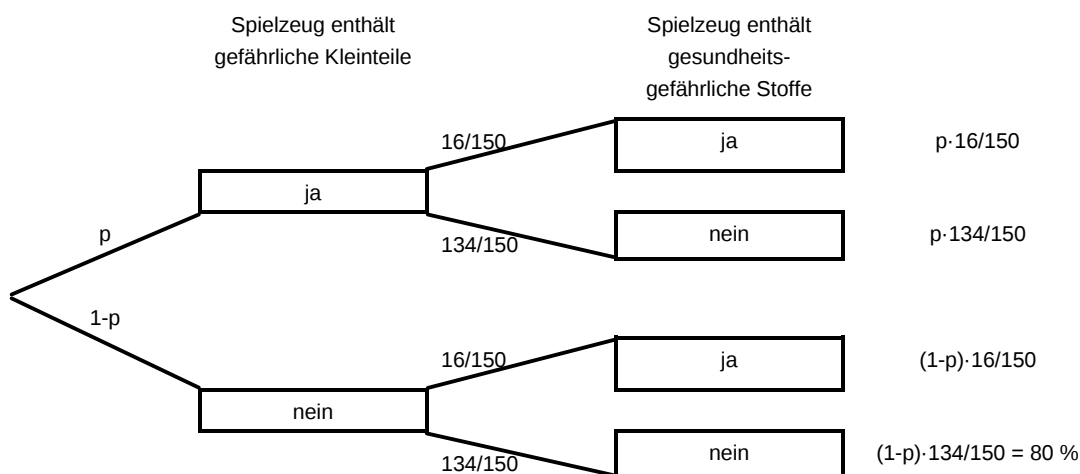
16 von 150 Proben enthielten gesundheitsgefährliche Stoffe (zweithäufigster Schwachpunkt) $\Rightarrow$ es können nicht 14 Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen gewesen sein.

2. Um die Wahrscheinlichkeit p zu berechnen, dass eines der untersuchten 150 Spielzeuge gefährliche Kleinteile aufweist, verwendet jemand als Ansatz die Gleichung

$$(1-p) \cdot \left(1 - \frac{16}{150}\right) = 0,8.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p und erklären Sie diesen Ansatz beispielsweise mithilfe eines Baundiagramms. Geben Sie dabei Voraussetzungen an, unter denen dieser Ansatz richtig ist.

(11 BE)



Unter der Voraussetzung, dass es nur diese beiden Mängeltypen bei Spielzeugen gibt und beide unabhängig voneinander auftreten, beschreibt die angegebene Gleichung die Wahrscheinlichkeit, dass keine der beiden Mängel vorliegt. Aus der Gleichung ergibt sich $p \approx 10,45 \%$.

3. Eine große deutsche Spielzeugfirma ist überzeugt, dass deutsches Spielzeug vergleichsweise deutlich weniger Mängel aufweist. Sie behauptet, dass weniger als jedes zehnte Spielzeug mangelhaft ist. Sie beauftragt ein Institut, dies zu überprüfen. Das Institut untersucht daraufhin 100 zufällig ausgewählte deutsche Spielzeuge mit der Nullhypothese H_0 : Mindestens jedes zehnte Spielzeug ist mangelhaft.
- 3.1 Es wird vorgeschlagen, dass H_0 bei weniger als 6 mangelhaften Proben der 100 Spielzeuge abgelehnt wird. Geben Sie an, was bei diesem Test ein Fehler 1. Art ist, und ermitteln Sie die maximale Wahrscheinlichkeit, einen solchen Fehler zu begehen. Begründen Sie, warum die Wahrscheinlichkeit auch kleiner sein kann.
- 3.2 Das Institut beschließt, für den Hypothesentest ein Signifikanzniveau von 1 % zu verwenden. Entwickeln Sie eine Entscheidungsregel und bewerten Sie die obige Behauptung der Spielzeugfirma für den Fall, dass bei dem Test 3 der 100 Proben Mängel aufweisen.
- (13 BE)

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.1 mithilfe des TI-30X Pro:

X : Anzahl der mangelhaften Spielzeuge in der Stichprobe

Verwerfungsbereich der Hypothese H_0 : $X < 6$ (kritischer Wert des Hypothese: $k = 5,5$)

Für $p = 0,1$ und $n = 100$ gilt: $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0,058$

Für $p > 0,1$ und $n = 100$ gilt: $P(X < 6) = P(X \leq 5) < 0,058$, denn je größer die Wahrscheinlichkeit p ist, umso größer wird der Erwartungswert und desto weiter liegt der kritische Wert vom Erwartungswert entfernt. Beispielsweise gilt für $p = 0,11$ und $n = 100$: $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0,030$. Die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art beträgt daher 5,8 %.

--	--	--	--

Bei einem Fehler 1. Art liegt das Stichprobenergebnis zufällig im Verwerfungsbereich der Hypothese, obwohl die Hypothese wahr ist, d. h. die Anzahl der mangelhaften Spielzeuge in der Stichprobe ist zufällig kleiner als 6, obwohl der Anteil mangelhafter Spielzeuge in der Gesamtheit (= Erfolgswahrscheinlichkeit p) mindestens 10 % beträgt.

➤ Mögliche Bearbeitung der Teilaufgabe 3.2 mithilfe des TI-30X Pro:

Anhand der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $p = 0,1$ kann man ablesen, dass gilt:

$P(X \leq 3) \approx 0,0078 < 0,01$, d. h. die Entscheidungsregel lautet:

Verwirf die Hypothese $p \geq 0,1$, falls weniger als 4 Spielzeuge mit Mängeln in der Stichprobe vom Umfang $n = 100$ gefunden werden.

Demnach müsste die Behauptung der Spielzeugfirma ($p < 0,1$) zurückgewiesen werden.

--	--	--